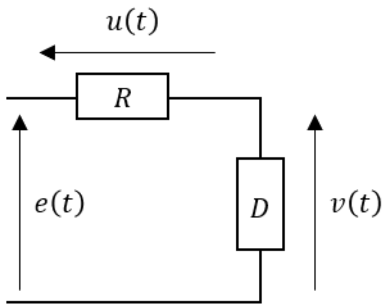
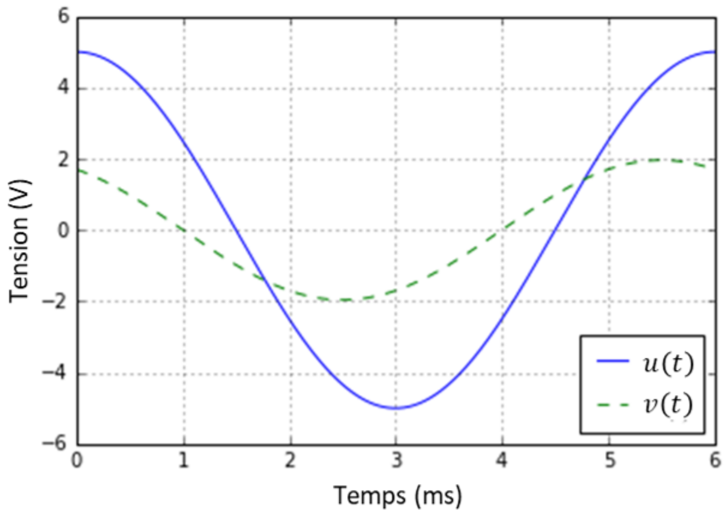
MPSI 2024/2025 | DM n°4 | À rendre le lundi 02/12

I - Détermination d'un dipôle inconnu

Dans le montage ci-dessous, le GBF délivre une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω, R est un conducteur ohmique et D un dipôle inconnu. On note $u(t)$ et $v(t)$ les tensions aux bornes respectivement de R et de D. On visualise à l'oscilloscope $u(t)$ et $v(t)$ et on obtient le graphe ci-dessous.





On utilisera ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de D, sachant que $R = 100\ \Omega$.

1) Déterminer graphiquement les expressions complètes de $u(t)$ et $v(t)$. Faire les applications numériques pour la valeur moyenne, l'amplitude, la pulsation et la phase à l'origine de chaque signal.

2) On note $\underline{Z} = X + jY$ l'impédance complexe du dipôle D (avec $X \in \mathbb{R}^+$ et $Y \in \mathbb{R}$). Déterminer les caractéristiques du dipôle. Proposer alors un modèle équivalent à ce dipôle composé de condensateur et/ou bobine et/ou résistor.

- Fin de la partie I -

II - Étude d'un circuit à retard

On se place en régime sinusoïdal établi. On souhaite fabriquer un filtre qui doit retarder le signal d'entrée $e(t)$ d'une durée fixée, notée τ. Mathématiquement, on souhaite donc obtenir :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

3) Introduire les signaux complexes $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$, puis déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$ du filtre souhaité.

Bien qu'il ne soit pas strictement possible de réaliser un tel filtre avec une combinaison des dipôles R, L et C, nous verrons qu'il est possible de concevoir des filtres à partir de ces dipôles qui ont un comportement asymptotique égal à celui du filtre recherché.

On donne le développement limité à l'ordre 2 pour $|x| \ll 1$ (avec $x \in \mathbb{C}$) des fonctions ci-dessous.

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2$$

On considère deux filtres, dont les fonctions de transfert sont données par :

$$\underline{H_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \text{et} \quad \underline{H_2} = \frac{1}{1 + j\omega RC - LC\omega^2} \quad \text{avec :} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

4) Établir les développements limités à l'ordre 1 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_1}$. Donner l'expression du retard τ ainsi réalisé.

5) Établir les développements limités à l'ordre 2 en ω pour $\omega \to 0$ de $\underline{H_r}$ et $\underline{H_2}$. Donner l'expression du retard τ ainsi réalisé. Quelle est alors la valeur du facteur de qualité Q ?

- Fin de la partie II -